Universidade Estadual do Rio Grande do Sul
Disciplina: Métodos Numéricos
Professora: Edi Terezinha de Oliveira Grings

1.Interpolação

Consideremos (n+1) pontos distintos: x_o, x_1, ..., x_n e os valores de f(x) nesses pontos: $f(x_o)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

A forma de interpolação de f(x) consiste em se obter uma determinada função g(x) tal que $g(x_o)=f(x_0)$; $g(x_1)=f(x_1)$; $g(x_2)=f(x_2)$;....; $g(x_n)= f(x_n)$.

2. Interpolação Polinomial

Dados os pontos $(x_o, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ... , $(x_n, f(x_n))$, portanto (n+1) pontos, queremos aproximar f(x) por um polinômio $p_n(x)$, de grau menor ou igual a n, representado por:

$$Pn(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (1)$$

Então temos:

$$\begin{cases} Pn(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ Pn(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \\ Pn(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \qquad (2)$$

Portanto, obter $p_n(x)$ significa obter os coeficientes a_o, a_1, ..., a_n. Determinar estes coeficientes gera um sistema de equações lineares com n+1 equações e n+1 incónita:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

A solução do sistema fornece os coeficientes do polinômio. Desde que x_o, x_1, ..., x_n sejam pontos distintos, temos $\det(A) \neq 0$ e, então o sistema linear admite solução única.

Teorema 1: Existe um único polinômio $p_n(x)$, de grau $\leq$ n, tal que $p_n(x_k)=f(x_k)$, k=0, 1, 2 ..., n desde que $x_k \neq x_j$, $j \neq k$.

O polinômio interpolador é único, mas há várias formas de obtê-lo. Uma das formas é a solução do sistema linear. Estudaremos a forma de Lagrange e Newton.

3. Forma de Lagrange:

O polinômio interpolador é expresso na forma de Lagrange:

$$\mathrm{Pn}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \tag{4}$$

ou

$$\begin{aligned} Pn(x) = {} & y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \\ & + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \\ & + \cdots \\ & + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} + \end{aligned} \tag{5}$$

Como $p_n(x_o)=y_0$; $p_n\ (x_1)=y_1$; $p_n(x_2)=y_2$,.... e $p_n(x_n)= y_n$, $p_n(x)$ passa por todos os pontos tabelados.

O polinômio de Lagrange é uma forma de encontrar o polinômio interpolador sem a necessidade de resolver sistemas.

3. Forma de Newton:

No polinômio interpolador de Newton utiliza-se diferenças divididas, que é definida como:

$$\begin{cases} f[x_o] = f(x_o) & \textit{Ordem zero} \\ f[x_o, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} & \textit{Ordem um} \\ f[x_o, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0 x_1]}{x_2 - x_0} & \textit{Ordem dois} \\ \cdots & \\ f[x_o, x_1 \dots, x_n] = \dfrac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} & \textit{Ordem n} \end{cases} \tag{6}$$

Uma forma mais simples de encontrar as diferenças divididas é organizar uma tabela:

x	Ordem zero	Ordem um	Ordem dois	Ordem 3	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	...	$f[x_0,x_1,x_2,...,x_3]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	...	...	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$	...	$f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n]$		
x_3	$f[x_3]$	...	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$			
...	...	$f[x_{n-1},x_n]$				
x_n	$f[x_n]$					

A definição de diferenças divididas nos fornece a forma de Newton para o polinômio interpolador:

$$
\begin{aligned}
Pn(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_o, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_o, x_1, x_2] + ... \\
+ (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) f[x_o, x_1 ...., x_n]
\end{aligned}
\tag{7}
$$