Universidade Estadual do Rio Grande do Sul
Disciplina: Métodos Numéricos
Professora: Edi Terezinha de Oliveira Grings

Interpolação por Spline Cúbico

Uma das dificuldades com a interpolação polinomial, particularmente se o polinômio é de alta ordem, é o seu caráter altamente oscilatório. Uma interpolação de uma função mais suave pode ser produzida mecanicamente por uma curva Francesa ou forçando uma barra elástica flexível a passar pelos pontos desejados. O análogo matemático desta barra flexível é a função *spline.* Uma spline é uma função polinomial por partes, isto é, é um polinômio de grau n entre cada dois nós da malha considerada.

A aproximação mais comum por polinômios por partes é usado polinômios cúbicos, *os splines cúbicos,* esta aproximação interpola pontos entre cada dois pontos consecutivos da malha, que não precisa ser igualmente espaçada, usando polinômios cúbicos. Um polinômio cúbico envolve quatro constantes, nos dando assim flexibilidade para assegurar que o interpolante além de ser contínuo em cada ponto da malha seja diferenciável, e ainda podendo garantir a existência de derivadas segundas contínuas.

Assim, uma spline cúbica, $S_3(x)$, é uma função polinomial por partes, contínua, onde cada parte, $s_k(x)$, é um polinômio de grau 3 no intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, k = 1, 2, ..., n.

$S_3(x)$ tem a primeira e a segunda derivadas contínuas, o que faz com que a curva $S_3(x)$ não tenha picos e nem troque abruptamente de curvatura nos nós.

Vamos reescrever a definição de spline cúbica interpolante:

Supondo que f(x) esteja tabelada nos pontos x_i, i = 0, 1, 2, ..., n se existem n polinômios de grau 3, $s_k(x)$, k = 1, ..., n tais que:

i) $S_3(x) = s_k(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$, k = 1, 2, ..., n.
ii) $S_3(x_i) = f(x_i)$, i = 0, 1, ..., n
iii) $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k)$, k = 1, 2, ..., (n - 1)
iv) $s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, k = 1, 2, ..., (n - 1)
v) $s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k)$, k = 1, 2, ..., (n - 1)

Para simplicidade de notação, escrevemos $s_k(x) = a_k(x-x_k)^3 + b_k(x-x_k)^2 + c_k(x-x_k) + d_k$, k = 1, 2, ..., n.

Assim o cálculo de $S_3(x)$ exige a determinação de 4 coeficientes para cada k, num total de 4n coeficientes: $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, c_n, d_n$.

De acordo com a definição que demos para cada $s_k(x)$, a condição (*i*) da definição de $S_3(x)$ está automaticamente satisfeita.
Para impor a condição (*ii*) montamos, para k = 1, ..., n, as equações:

$$s_k(x_k) = d_k = f(x_k), \tag{1}$$

às quais devemos acrescentar mais a equação:

$$s_1(x_0) = f(x_0) \Rightarrow -a_1h_1^3 + b_1h_1^2 - c_1h_1 + d_1 = f(x_0) \tag{2}$$

onde usamos a notação $h_k = x_k - x_{k-1}$, com k = 1.

A condição (*iii*) é satisfeita através das (n-1) equações: para k = 1, ..., (n-1), $s_{k+1}(x_k) = f(x_k)$, ou seja:

$$-a_{k+1} h_{k+1}^3 + b_{k+1}h_{k+1}^2 - c_{k+1}h_{k+1} + d_{k+1} = f(x_k). \tag{3}$$

Para impor as condições (*iv*) e (*v*), precisaremos das derivadas das $s_k(x)$:

$$s'_k(x) = 3a_k(x - x_k)^2 + 2b_k(x - x_k) + c_k \tag{4}$$

$$s''_k(x) = 6a_k(x - x_k) + 2b_k. \tag{5}$$

Observamos que $s''_k(x_k) = 2b_k$. Assim, cada coeficiente b_k pode ser escrito em função de $s''_k(x_k)$:

$$b_k = \frac{s''_k(x_k)}{2} \tag{6}$$

Analogamente, como $s''_k\ (x_{k-1}) = -6a_k h_k + 2b_k$, podemos também escrever a_k em função das derivadas segundas nos nós pois

$$a_k = \frac{2b_k - s''(x_{k-1})}{6h_k} = \frac{s''_{k-1}(x_{k-1})}{6h_k}$$

$$a_k = \frac{s''(x_k) - s''_{k-1}(x_{k-1})}{6h_k} \tag{7}$$

Observamos que, no caso k=1, estamos introduzindo uma variável, s''_o, arbitrária.

Uma vez que d_k=f(x_k) e já expressamos a_k e b_k, podemos usar (2) e (3) para termos c_k, também em função das derivadas segundas nos nós. Observamos que tirar c_1 da equação (2) e, para k= 1,..., (n-1) usar (3) é o mesmo que, para k= 1, 2, ..., n, temos:

$$c_k = \frac{-f(x_{k-1}) - a_k h_k^3 + b_k h_k^2 + d_k}{h_k} \tag{8}$$

$$= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - (a_k h_k^2 - b_k h_k)$$

$$= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \left\{ \frac{\left[s_k^{''}(x_k) - s_k^{''}(x_{k-1})\right]}{6} h_k \, \frac{-s_k^{''}(x_k)}{2} h_k \right\}$$

$$\text{ou seja }: c_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \frac{-2s_k^{''}(x_k)h_k - s_{k-1}^{''}(x_{k-1})h_k}{6}$$

Se usarmos mais as notações

$$s_k^{''}(x_k) = g_k \text{ e}$$

$$\text{f}(\text{x}_k) = y_K \text{, teremos}$$

$$\text{a}_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k} \tag{9}$$

$$\text{b}_k = \frac{g_k}{2} \tag{10}$$

$$\text{c}_k = \left[\frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1}h_k}{6} \right] \text{ e} \tag{11}$$

$$\text{d}_k = y_k. \tag{12}$$

Assim para k =1, 2, ..., n, podemos calcular todos os coeficientes de $s_k(x)$ em função de $g_j = s_j^{''}(x_j)$, j = 0, 1, ..., n.

Impondo agora a condição (*iv*) que ainda não foi utilizada, $s_k^{'}(x_k) = s_{k+1}^{'}(x_k)$, k = 1, 2, ..., (n-1) teremos:

$$s_k^{'}(x_k) = c_k = 3a_{k+1}h_{k+1}^2 - 2b_{k+1}h_{k+1} + c_{k+1}$$

$$\text{donde } c_{k+1} = c_k - 3a_{k+1}h_{k+1}^2 + 2b_{k+1}h_{k+1}$$

e usando (9), (10) E (11)

$$\begin{aligned}
&\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} + \frac{2h_{k+1}g_{k+1} + g_k h_{k+1}}{6} = \\
&= \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_{k+} g_{k-1} h_k}{6} - 3\left(\frac{g_{k+1} - g_k}{6}\right) h_{k+1} + \\
&+ 2\left(\frac{g_{k+1} h_{k+1}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes, para k = 1, ..., n-1,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}\big[h_k g_{k-1} + (2h_k + 3h_{k+1} - h_{k+1})g_k + \\
&+ (6h_{k+1} - 3h_{k+1} - 2h_{k+1})g_{k+1}\big] \\
&= \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right)
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\mathrm{h}_k g_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})g_k + h_{k+1}g_{k+1} = 6\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right) \tag{13}$$

que é um sistema da equação lineares com (n-1) equações (k = 1, ..., (n-1)) e (n +1) incógnitas: $g_0,\ g_1,\ \dots g_{n-1}, g_n$ e, portanto, indeterminado, Ax = b

onde $x = (g_0,\ g_1,\ \dots g_n)^T$

$$A = \begin{bmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & . & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & . & \\ & & . & . & . \\ & & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) & h_n \end{bmatrix}$$

e

$$b = 6\begin{pmatrix} \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} & - & \dfrac{y_1 - y_o}{h_1} \\ \dfrac{y_3 - y_2}{h_3} & - & \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} - \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} & - & \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Para podermos resolver esse sistema, de forma única, teremos de impor mais duas condições.

Algumas alternativas:

1) $S''_3(x_o)= g_o=0$ e $S''_3(x_n)= g_n=0$, que é chamada de sline natural.

Esta escolha é equivalente a supor que os polinômios cúbicos nos intervalos extremos ou são lineares ou próximos de funções lineares.

2) $g_o=g_1$, $g_n=g_{n-1}$, que é equivalente a supor que as cúbicas são aproximadamente parábolas, nos extremos.